SOLUCIONES

1 - a) Indeterminación del tipo 1^{∞}

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n^3+5n+3}{3n^3+2n^2-1}\right)^{2n+3}=\lim_{n\to\infty} e^{(2n+3)\left(\frac{3n^3+5n+3}{3n^3+2n^2-1}-1\right)}=$$

$$=\lim_{n\to\infty} e^{(2n+3)\left(\frac{\cancel{3n^3}+5n+3-\cancel{3n^3}-2n^2+1}{3n^3+2n^2-1}\right)}=e^{\lim_{n\to\infty}\frac{-4n^3+\cdots}{3n^3+\cdots}}=e^{-\frac{4}{3}}$$

---

b) La indeterminación del denominador $\infty-\infty$ tratamos de quitarla multiplicando y dividiendo por su expresión conjugada.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{\sqrt{3n^2+1}-\sqrt{2n^4+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2\left(\sqrt{3n^2+1}+\sqrt{2n^4+1}\right)}{\left(\sqrt{3n^2+1}-\sqrt{2n^4+1}\right)\left(\sqrt{3n^2+1}+\sqrt{2n^4+1}\right)}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2\left(\sqrt{n^2\left(3+\frac{1}{n^2}\right)}+\sqrt{n^4\left(2+\frac{1}{n^4}\right)}\right)}{(3n^2+1)-(2n^4+1)}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2\left(n\sqrt{3+\frac{1}{n^2}}+n^2\sqrt{2+\frac{1}{n^4}}\right)}{-2n^4+3n^2}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n^4\sqrt{2+\frac{1}{n^4}}+n^3\sqrt{3+\frac{1}{n^2}}}{-2n^4+3n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{2+\frac{1}{n^4}}+\frac{n^3}{n^4}\sqrt{3+\frac{1}{n^2}}}{-2+3\frac{n^2}{n^4}}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

---

2 - a) Derivando término a término la serie $\sum_{n=0}^{\infty}x^n$ se obtiene la serie $\sum_{n=1}^{\infty}n x^{n-1}$ y derivando ésta se obtiene la serie $\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)x^{n-2}$. Luego las tres tienen el mismo radio de convergencia.

La serie $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ es una serie geométrica de razón x que converge si $|x|<1$, luego su radio de convergencia es $r=1$ y su intervalo de convergencia es $-1<x<1$.

En los extremos $x=-1$ y $x=+1$ de su intervalo de convergencia, las series $\sum_{n=\$}^{\infty} n(-1)^n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} n$ son divergentes porque no es cero el límite de su término enésimo (condición necesaria para la convergencia de una serie).

La serie $\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)x^{n-2}$ en los extremos de su intervalo de convergencia es una serie numérica $\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)(-1)^n$ en $x=-1$ y en la serie $\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)$, y ambas divergen porque no es cero el límite de su término enésimo:

$$\nexists \lim_{n\to\infty} n(n-1)(-1)^n \quad y \quad \lim_{n\to\infty} n(n-1) = +\infty$$

---

b) La suma de la serie geométrica de razón menor que 1 es $S=\frac{a_1}{1-r}$, luego $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$

La serie $\sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1}$ converge en $x=\frac{1}{5}$ que está dentro de su intervalo de convergencia

$$f'\left(x=\tfrac{1}{5}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} n\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} = 5\sum_{n=1}^{\infty} n\left(\frac{1}{5}\right)^n = 5\,\frac{\frac{1}{5}}{\left(1-\frac{1}{5}\right)^2} = \frac{1}{\left(\frac{4}{5}\right)^2} = \frac{25}{16}$$

dado que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} n r^n$ suma $S=\frac{r}{(1-r)^2}$.

3. $$\begin{cases} f(x,y) = y\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ f(0,0) = 0 \end{cases}$$

a) $f(x,y)$ es una función racional cuyo denominador no se anula cuando $(x,y) \neq (0,0)$, luego es una función continua en todo $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$.

Estudiamos la continuidad en $(0,0)$ calculando su límite en $(0,0)$ usando el cambio a coordenadas polares

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} y\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} = \lim_{r\to 0} r\,\mathrm{sen}\,\theta \frac{r^2\cos^2\theta - r^2\mathrm{sen}^2\theta}{r^2\cos^2\theta + r^2\mathrm{sen}^2\theta} =$$

$$= \lim_{r\to 0} \frac{r^3\,\mathrm{sen}\,\theta\,(\cos^2\theta - \mathrm{sen}^2\theta)}{r^2(\cos^2\theta + \mathrm{sen}^2\theta)} = \lim_{r\to 0} r\,\mathrm{sen}\,\theta\,(\cos^2\theta - \mathrm{sen}^2\theta) =$$

$$= 0\cdot(\text{valor acotado}) = 0.$$

Luego $f(x,y)$ es continua en $(0,0)$ y por ello en todo $\mathbb{R}^2$.

---

b)

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0} = \lim_{x\to 0}\frac{0-0}{x-0} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{y\to 0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y-0} = \lim_{y\to 0}\frac{y\frac{-y^2}{y^2}-0}{y} = \lim_{y\to 0} -\frac{y^2}{y^2} = -1$$

$f(x,y)$ es una función racional cuyo denominador no se anula cuando $(x,y) \neq (0,0)$, luego es una función diferenciable en todo $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$.

Veamos si es diferenciable en $(0,0)$:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\left| f(x,y) - f(0,0) - (x-0)\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) - (y-0)\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\right|}{\|(x,y)-(0,0)\|} =$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\left| y\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} - 0 - x\cdot 0 - y\cdot(-1)\right|}{\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\left| y\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} + y\right|}{\sqrt{x^2+y^2}} =$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\left| y\left(\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}+1\right)\right|}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\left| y\,\frac{x^2\cancel{-y^2}+x^2\cancel{+y^2}}{x^2+y^2}\right|}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|2x^2y|}{(x^2+y^2)^{3/2}} =$$

$$= \lim_{r\to 0} \frac{|2\, r^2\cos^2\theta\, r \operatorname{sen}\theta|}{\left[r^2(\cos^2\theta+\operatorname{sen}^2\theta)\right]^{3/2}} = \lim_{r\to 0} \frac{2r^3\,|\cos^2\theta \operatorname{sen}\theta|}{r^3} = 2\,|\cos^2\theta\operatorname{sen}\theta|$$

Este límite no existe porque su valor depende de θ, luego $f(x,y)$ no es diferenciable en $(0,0)$

c) Al no ser diferenciable en $(0,0)$ tenemos que calcular la derivada direccional de $f(x,y)$ en $(0,0)$ mediante la definición.

$$D_{\frac{\vec v}{\|\vec v\|}} f(0,0) = f'\left((0,0);\left(\frac{1}{\sqrt2},\frac{1}{\sqrt2}\right)\right) = \lim_{t\to 0}\frac{f\left((0,0)+t\left(\frac{1}{\sqrt2},\frac{1}{\sqrt2}\right)\right)-f(0,0)}{t} =$$

$$= \lim_{t\to 0}\frac{f\left(\frac{t}{\sqrt2},\frac{t}{\sqrt2}\right)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{\frac{\cancel{t}}{\sqrt2}\cdot\frac{\left(\frac{t}{\sqrt2}\right)^2-\left(\frac{t}{\sqrt2}\right)^2}{\left(\frac{t}{\sqrt2}\right)^2+\left(\frac{t}{\sqrt2}\right)^2}}{\cancel{t}} = \lim_{t\to 0}\frac{1}{\sqrt2}\cdot\frac{\cancel{t^2}\left[\left(\frac{1}{\sqrt2}\right)^2-\left(\frac{1}{\sqrt2}\right)^2\right]}{\cancel{t^2}\left[\left(\frac{1}{\sqrt2}\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt2}\right)^2\right]} =$$

$$= \frac{0}{\sqrt2\cdot 2\cdot\frac12} = 0 \,//$$

4. a) $f(x,y) = x^2y^3 + x^2 + 6y^2$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2xy^3 + 2x = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 3x^2y^2 + 12y = 0 \end{array}\right\}$$

$$2 \cdot x\,(y^3+1) = 0 \quad \begin{cases} \boxed{x=0} \\ y^3+1=0\,,\; y^3=-1\,,\; \boxed{y=-1} \end{cases}$$

$$3y\,(x^2y+4) = 0 \quad \begin{cases} \boxed{y=0} \\ x^2y+4=0 \end{cases}$$

Para que se cumplan simultaneamente las dos ecuaciones se tienen las posibilidades $\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$, $\begin{cases} y=-1 \\ -x^2+4=0\,,\; x^2=4\,,\; x=\pm 2 \end{cases}$

Hay tres posibles extremos relativos

$(0,0)$, $(2,-1)$, $(-2,-1)$, que analizamos con la matriz hessiana

$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\[2ex] \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2y^3+2 & 6xy^2 \\ 6xy^2 & 6x^2y+12 \end{pmatrix}$$

$$Hf(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix} \quad \left.\begin{array}{l} \det Hf(0,0) = 24 > 0 \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = 2 > 0 \end{array}\right\} \text{ mínimo relativo en } (0,0)$$

$$Hf(2,-1) = \begin{pmatrix} 0 & 12 \\ 12 & -12 \end{pmatrix} \quad \det Hf(2,-1) = -144 < 0\,, \text{ punto de silla en } (2,-1)$$

$$Hf(-2,-1) = \begin{pmatrix} 0 & -12 \\ -12 & -12 \end{pmatrix} \quad \det Hf(-2,-1) = -144 < 0\,, \text{ punto de silla en } (-2,-1)$$

---

b) $f(x,y) = xy$ es una función continua en todo $\mathbb{R}^2$, luego es continua en el compacto formado por los puntos de la elipse $4x^2+y^2=4$. El teorema de Weierstrass asegura que $f(x,y)$ tiene máximo y mínimo absolutos en la elipse.

Aplicamos el método de los multiplicadores de Lagrange: $F(x,y) = f(x,y) + \lambda\,\varphi(x,y)$ $\qquad \varphi(x,y) = 4x^2+y^2-4=0$

$$F(x,y) = xy + \lambda\,(4x^2+y^2-4)$$

Buscamos los puntos estacionarios (o críticos) de $F(x,y)$ sobre la elipse.

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial F}{\partial x}(x,y)=0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial y}(x,y)=0 \\ 4x^2+y^2-4=0 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} y+8\lambda x=0 \\ x+2\lambda y=0 \\ 4x^2+y^2-4=0 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} \lambda = -\dfrac{y}{8x} \\ \lambda = -\dfrac{x}{2y} \end{array}\right\} \text{ si } x\neq 0,\ y\neq 0$$

$$-\frac{y}{8x} = -\frac{x}{2y}$$

$$y^2 = 4x^2$$

$$\boxed{y = \pm 2x}$$

entrando en la condición

$$4x^2 + (\pm 2x)^2 - 4 = 0$$

$$4x^2+4x^2-4=0$$

$$8x^2-4=0$$

$$2x^2=1$$

$$x^2=\frac{1}{2} \qquad x=\pm\sqrt{\frac{1}{2}} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$$

Luego se obtienen los puntos $x=\frac{1}{\sqrt2},\ y=\frac{2}{\sqrt2}$

$x=\frac{1}{\sqrt2},\ y=-\frac{2}{\sqrt2}$

$x=-\frac{1}{\sqrt2},\ y=-\frac{2}{\sqrt2}$

$x=-\frac{1}{\sqrt2},\ y=\frac{2}{\sqrt2}$

$f\left(\frac{1}{\sqrt2},\frac{2}{\sqrt2}\right) = f\left(-\frac{1}{\sqrt2},-\frac{2}{\sqrt2}\right) = 1$ valor máximo absoluto

$f\left(\frac{1}{\sqrt2},-\frac{2}{\sqrt2}\right) = f\left(-\frac{1}{\sqrt2},\frac{2}{\sqrt2}\right) = -1$ valor mínimo absoluto

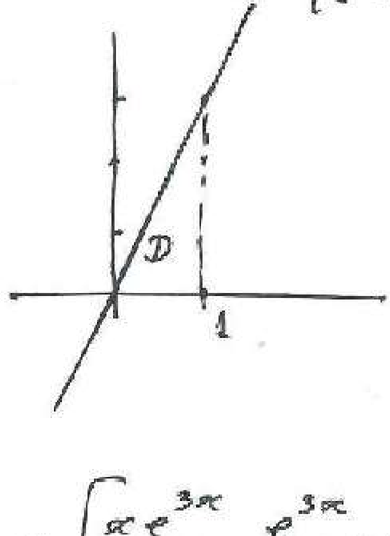
---

El rango de la matriz de regularidad de la función condición en los cuatro puntos es 1. $\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x},\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right) = (8x, 2y)$

Son puntos regulares de $\varphi(x,y)$, luego vale el teorema de Lagrange.

5 - a)

$$D=\{(x,y)\ ;\ 0\le x\le 1,\ 0\le y\le 3x\}$$



$$\iint_D x e^y\,dx\,dy = \int_{x=0}^{x=1}\left(\int_{y=0}^{y=3x} x e^y\,dy\right)dx =$$

$$=\int_{x=0}^{x=1}\Big[x e^y\Big]_{y=0}^{y=3x}dx = \int_{x=0}^{x=1}\left(x e^{3x}-x\right)dx =$$

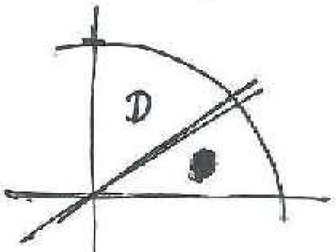
$$=\left[\frac{x e^{3x}}{3}-\frac{e^{3x}}{9}-\frac{x^2}{2}\right]_{x=0}^{x=1}=\left(\frac{e^3}{3}-\frac{e^3}{9}-\frac{1}{2}\right)-\left(0-\frac{1}{9}-0\right)=e^3\cdot\frac{2}{9}-\frac{7}{18}$$

NOTA.- $\displaystyle\int \underbrace{x}_{u}\,\underbrace{e^{3x}dx}_{dv} = \frac{x e^{3x}}{3}-\int\frac{e^{3x}}{3}dx = \frac{x e^{3x}}{3}-\frac{e^{3x}}{9}+C$

$$\boxed{\begin{array}{ll} x=u & dx=du \\ e^{3x}dx=dv & \dfrac{e^{3x}}{3}=v \end{array}}$$

---

b) $D=\{(x,y)\ :\ x^2+y^2\le 1,\ 0\le x\le y\}$



En coordenadas polares $x=r\cos\theta$, $y=r\,\mathrm{sen}\,\theta$

$$\varphi^{-1}(D)=D^*=\left\{(r,\theta)\ :\ 0\le r\le 1,\ \frac{\pi}{4}\le\theta\le\frac{\pi}{2}\right\}$$

La región D es la transformada de D^*, $\varphi(D^*)=D$.

$$\iint_D\frac{1}{1+4x^2+4y^2}dx\,dy=\iint_{D^*}\frac{1}{1+4r^2}\cdot r\,dr\,d\theta=\int_{\theta=\frac{\pi}{4}}^{\theta=\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{8}\int_{r=0}^{r=1}\frac{8r}{1+4r^2}dr\right)d\theta=$$

$$=\int_{\theta=\frac{\pi}{4}}^{\theta=\frac{\pi}{2}}\frac{1}{8}\Big[\ln(1+4r^2)\Big]_{r=0}^{r=1}d\theta=\frac{1}{8}\left(\ln 5-\ln 1\right)\cdot\Big[\theta\Big]_{\theta=\frac{\pi}{4}}^{\theta=\frac{\pi}{2}}=\frac{\ln 5}{8}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)=$$

$$=\frac{\ln 5}{8}\cdot\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{32}\ln 5$$